

Zasady zachowania w mechanice



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

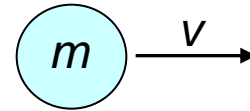
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Pęd

Pędem ciała nazywamy iloczyn jego masy i jego prędkości. Pęd, podobnie jak prędkość, jest wielkością **wektorową**.

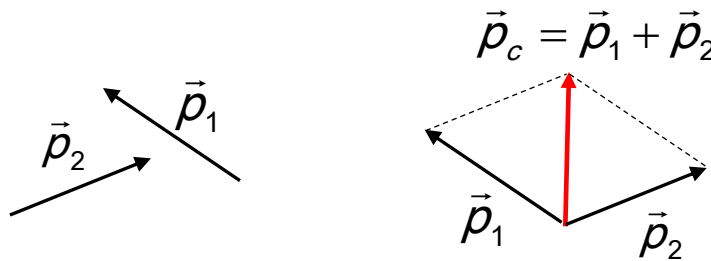
$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$



Zgodnie z powyższą definicją jednostką pędu jest kilogram razy metr na sekundę: [1kg*m/1s]

Pędem całkowitym **układu** kilku ciał nazywamy sumę wektorową pędów poszczególnych ciał wchodzących w skład układu.

$$\vec{p}_c = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots$$



Układ nazywamy **izolowanym** jeśli nie może on **w żaden możliwy sposób** oddziaływać z otoczeniem. W szczególności nie może w nim żadna siła pochodząca z poza układu. W praktyce, układy izolowane nie istnieją, ale możemy za układ izolowany uznać na przykład układ, w którym *wypadkowa* sił zewnętrznych działających na ciała wchodzące w skład układu jest równa zero.

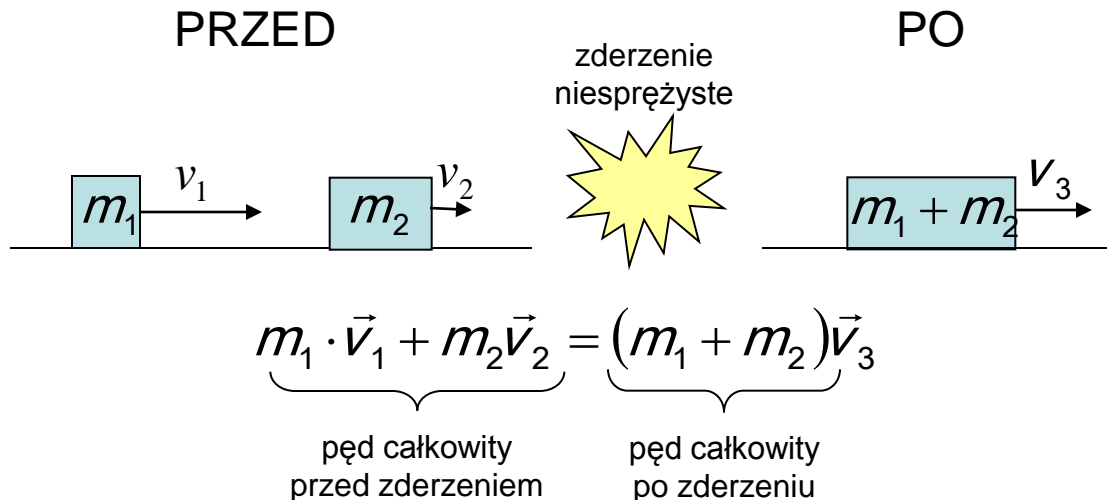
Zasada zachowania pędu

Zasada zachowania pędu mówi, że pęd całkowity układu izolowanego jest stały.

$$\vec{p}_c = \text{const}$$

Zasada zachowania pędu oznacza, że jeśli wyznaczmy pęd całkowity układu w pewnej chwili czasu, to w każdej następnej chwili czasu pęd układu pozostaje niezmienny. W szczególności, jeśli pęd całkowity jest równy zero to pozostaje on równy zero.

$$\vec{p}_{pocz} = \vec{p}_{konc}$$



W zderzeniu niesprężystym ciała uczestniczące w zderzeniu sklejają się w jedno ciało, czemu towarzyszy wydzielanie się ciepła. W takich zderzeniach obowiązuje zasada zachowania pędu

Energia

Energia jest wielkością skalarną charakteryzującą zdolność do wykonania pracy. Energia może przybierać różne formy (np. energia mechaniczna, energia cieplna) . Jednostką energii jest dżul oznaczany symbolem [J].

Energia mechaniczna może przybierać dwie formy: energii kinetycznej lub energii potencjalnej.

Energia kinetyczna jest formą energii związaną z ruchem (postępowym lub obrotowym). Ciało posiada energię kinetyczną kiedy jest w ruchu. Jej wartość jest określona jako połowa iloczynu masy ciała i kwadratu jego prędkości postępowej.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

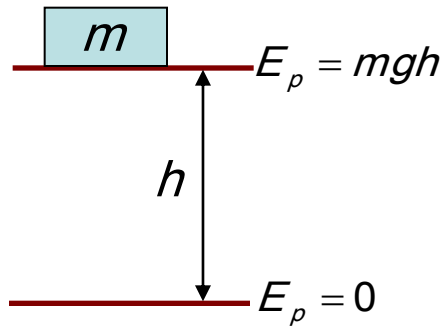
Fakt, że ciało posiada energię kinetyczną oznacza, że może ono wykonać pracę, na przykład uderzając w inne ciało powodując jego przemieszczenie lub nagrzanie. Jednocześnie jeśli chcemy nadać nieruchomemu ciału pewną energię kinetyczną musimy wykonać pracę na nadanie mu prędkości. Związek pomiędzy pracą a energią można zawrzeć w następującym sformułowaniu:

Zmiana energii kinetycznej ciała jest równa pracy wykonanej nad tym ciałem.

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

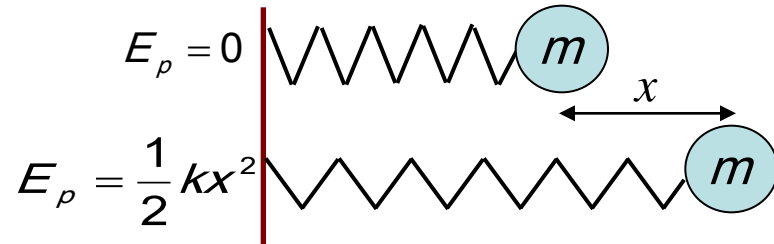
Energia potencjalna jest formą energii związaną z położeniem ciała. Ciało może posiadać zdolność do wykonania pracy na przykład w związku ze swoim położeniem w polu grawitacyjnym Ziemi (grawitacyjna energia potencjalna), lub z odkształceniem sprężyny (sprężysta energia potencjalna).

Grawitacyjna energia potencjalna



g – przyspieszenie ziemskie

Sprężysta energia potencjalna



k – stała sprężyny

Poziom zera energii potencjalnej może być wybrany dowolnie, jednak nie oznacza to, że może on być dowolnie zmieniany. Jeśli dane położenie ciała uznamy jako odpowiadające zerowej energii potencjalnej, to położenie to należy konsekwentnie uznawać jako zerowe podczas dalszych obliczeń energii.

Wybór zera energii potencjalnej dyktowany jest zazwyczaj wygodą obliczeń. W powyższych przykładach przyjęto $E_p=0$ na poziomie powierzchni ziemi (w przypadku grawitacyjnej energii potencjalnej) oraz dla sprężyny nierozciągniętej (dla sprężystej energii potencjalnej).

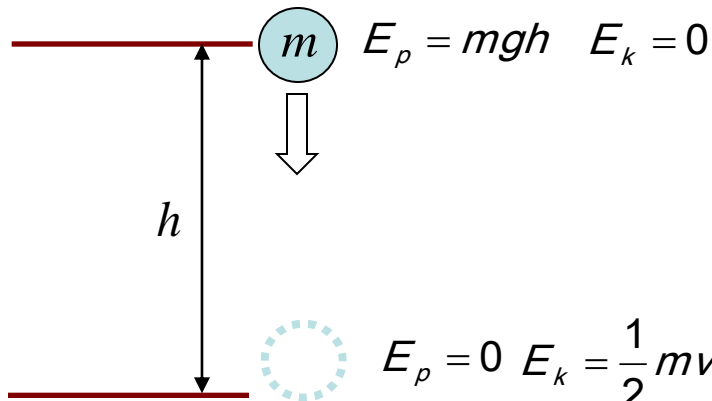
Zasada zachowania energii

Zasada zachowania energii całkowitej jest jedną z najbardziej fundamentalnych zasad fizyki. Mówi ona, że w układzie izolowanym całkowita energia jest zachowana.

Energia układu może zmieniać swoją formę np. z energii mechanicznej przechodzić w energię cieplną podczas tarcia jednak suma wszystkich rodzajów energii pozostaje stała.

Zasada zachowania energii mechanicznej obowiązuje, gdy zaniedbać możemy energię cieplną, czyli możemy przyjąć, że całkowita energia układu jest energią mechaniczną. W takim przypadku zasada ta głosi, że suma energii kinetycznej i potencjalnej układu jest stała.

$$E_k + E_p = \text{const}$$



Podczas upuszczania ciała z wysokości h , w chwili puszczenia ciała jego całkowita energia jest energią potencjalną

W momencie osiągnięcia poziomu powierzchni ziemi energia całkowita jest energią kinetyczną, równą początkowej energii potencjalnej

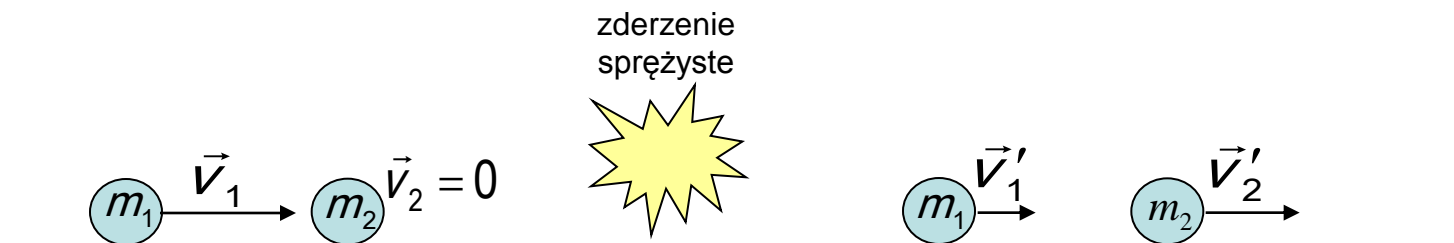
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

Zderzeniem sprężystym nazywamy takie zderzenie, któremu nie towarzyszy wydzielanie ciepła (tzn. ciała uczestniczące w zderzeniu nie sklejają się, ale odbijają od siebie). W zderzeniach takich **obowiązuje zasada zachowania energii kinetycznej oraz zasada zachowania pędu**.

Zderzenie centralne to takie zderzenie, w którym zderzające się ciała poruszają się po tej samej prostej zarówno przed jak i po zderzeniu.

Należy pamiętać, że w zderzeniach niesprężystych nie obowiązuje zasada zachowania energii kinetycznej. Całkowita energia jest jednak zachowana, gdyż bilans energii uzupełnia energia cieplna.

Rzeczywiste zderzenia nie są ani doskonale sprężyste, ani doskonale niesprężyste – są zawsze częściowo niesprężyste (tzn. zawsze podczas zderzenia wydzielana jest pewna ilość ciepła). W pewnych przypadkach ilość ta jest na tyle mała, że możemy zderzenie uznać za sprężyste.



$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad \text{zasada zachowania pędu}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad \text{zasada zachowania energii kinetycznej}$$

Zadanie 1. Na jadącą z prędkością $v=6\text{m/s}$ platformę o masie $M=10\text{ kg}$ spadł poziomo worek piasku o masie $m=2\text{ kg}$. Ile wynosiła po upadku prędkość platformy z workiem piasku ?

Rozwiązanie



Przed upadkiem worka jego prędkość pozioma wynosi 0. Upadek worka traktujemy jako zderzenie niesprężyste. Platforma przekazuje część swojego pędu workowi i dalej porusza się razem z workiem. Jak wynika z zasady zachowania pędu wiemy, że pęd platformy przed upadkiem worka jest równa pędowi platformy z workiem po upadku:

$$m \cdot 0 + M \cdot v = (M + m) \cdot u$$

Przekształcając powyższe równanie otrzymujemy wyrażenie na prędkość platformy z workiem piasku:

$$u = \frac{M \cdot v}{(M + m)}$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy $u = \frac{10\text{kg} \cdot 6\text{m/s}}{12\text{kg}} = 5\text{m/s}$

Zadanie2 .Na gładkiej podłodze leży drewniany klocek o masie $M=7\text{kg}$. W kierunku klocka zostaje wystrzelona z pistoletu kula o masie $m= 10\text{g}$ poruszająca się z prędkością $v=100\text{ m/s}$. Kula przebija klocek i po przebicium porusza się w tym samym kierunku, ale z prędkością $v_1=30\text{m/s}$. Oblicz prędkość u klocka po tym, jak przeszła przez niego kula.

Rozwiązanie



Pęd układu przed przebicciem klocka przez kulę jest pędem kuli. Przejściu kuli przez klocek towarzyszy wydzielanie ciepła, więc może być traktowane jako zderzenie niesprężyste. Po przejściu kuli na pęd układu składa się pęd kuli i pęd klocka, który uzyskał część pierwotnego pędu kuli. Zapisując zasadę zachowania pędu mamy:

$$m \cdot v = m \cdot v_1 + M \cdot u$$

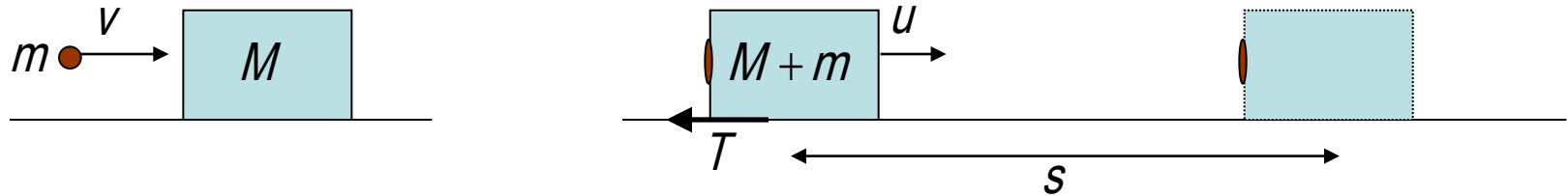
Przekształcając powyższe równanie otrzymujemy:

$$u = \frac{m(v - v_1)}{M}$$

Podstawiając dane liczbowe mamy: $u = \frac{0.01\text{kg} \cdot (100\text{m/s} - 30\text{m/s})}{7\text{kg}} = 0.1\text{m/s}$

Zadanie 3. W klocek o masie M uderza poruszająca się z prędkością v kulka kitu i przykleja się do niego. Klocek wraz z kulką kitu zaczynają się poruszać. Oblicz drogę s jaką przebędzie klocek do chwili zatrzymania jeśli współczynnik tarcia klocka o podłogę wynosi f .

Rozwiązanie



Korzystając z zasady zachowania pędu możemy wyznaczyć prędkość jaką posiada klocek wraz z przyklejonym kitem tuż po zderzeniu: $m \cdot v = (M + m) \cdot u$

Z czego wynika:
$$u = \frac{m \cdot v}{M + m}$$

Na skutek działania stałej, przeciwnej do kierunku ruchu siły tarcia T klocek będzie poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym, aż do momentu zatrzymania po przebyciu drogi s . Ujemne przyspieszenie jakiego doznaje klocek wynosi

$$a = \frac{T}{M + m} = fg$$

Drogę jaką przebędzie klocek do momentu zatrzymania (czyli do chwili kiedy jego prędkość będzie równa zero) możemy obliczyć z równania:

$$s = ut - \frac{at^2}{2} = ut - \frac{fgt^2}{2}$$

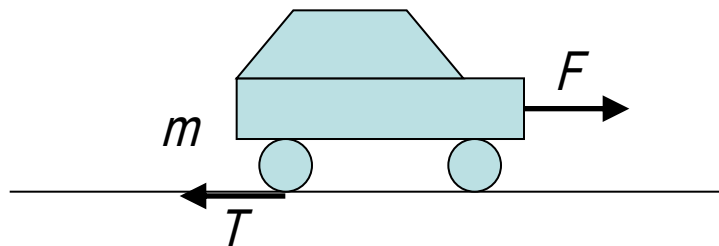
Czas po jakim klocek się zatrzyma wyznaczmy z warunku zerowej prędkości końcowej: $0 = u - at = u - fgt$

Szukany czas wynosi: $t = u/fg$

Co ostatecznie prowadzi do końcowego wyniku:
$$s = u \frac{u}{fg} - \frac{fg(u/fg)^2}{2} = \frac{u^2}{2fg} = \frac{1}{2fg} \left(\frac{mv}{m + M} \right)^2$$

Zadanie 4. Jaką pracę wykona silnik samochodu o masie $m=1000\text{kg}$, który porusza się z przyspieszeniem $a=2\text{m/s}^2$ na odcinku drogi $s=100\text{m}$? Współczynnik tarcia kół samochodu o podłoże wynosi $f=0.1$.

Rozwiązanie



Na przyspieszający samochód działają dwie siły: siła pochodząca od silnika F oraz siła tarcia T . Wypadkowa tych sił nadaje samochodowi przyspieszenie a . Na mocy drugiej zasady dynamiki możemy napisać:

$$ma = F - T$$

Wartość siły tarcia wynosi: $T = f \cdot F_N = fmg$

Możemy wyznaczyć wartość siły pochodzącej od silnika:

$$F = ma + T = ma + mfg = m(a + fg)$$

Praca siły F na drodze s jest równa:

$$W = F \cdot s = m(a + fg) \cdot s$$

Ostateczny wynik otrzymujemy po podstawieniu wartości liczbowych:

$$W = 1000\text{kg}(2\text{m/s}^2 + 0.1 \cdot 10\text{m/s}^2) \cdot 100\text{m} = 3 \cdot 10^5 \text{J}$$

Zadanie 5. W spoczywającą kulę o masie M uderza druga kula o masie m poruszająca się z prędkością v . Po zderzeniu kule sklejają się i poruszają dalej. Jaka ilość ciepła wydzielita się podczas zderzenia ?

Rozwiązanie



Zderzenie dwóch kul jest niesprężyste, więc możemy skorzystać z zasady zachowania pędu, lecz nie jest spełniona zasada zachowania energii mechanicznej. Prędkość sklejonych kul możemy obliczyć z zasady zachowania pędu:

$$mv = (M + m)u$$

z czego mamy:

$$u = \frac{mv}{M + m}$$

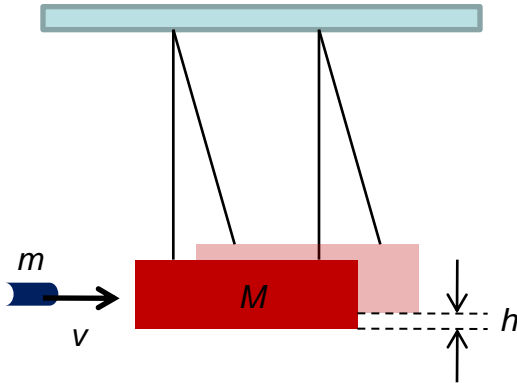
Bilans energii kinetycznej uzupełnia energia cieplna Q . Jej wartość możemy otrzymać odejmując początkową i końcową energię całkowitą układu:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(M + m)u^2}{2} + Q$$

Ostatecznie dostajemy:

$$Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{(M + m)\left(\frac{mv}{M + m}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{m^2v^2}{2(M + m)}$$

Zadanie 6. Wahadło balistyczne służy do pomiaru prędkości pocisków. Składa się ono z masywnego bloku drewnianego o masie M wiszącego pionowo na dwóch sznurkach. Pocisk o masie m porusza się poziomo z nieznaną prędkością v , uderza w blok i grzęźnie w nim. Jak wyznaczyć nieznaną prędkość pocisku?



Rozwiązanie

Możemy zastosować zasadę zachowania pędu dla przedziału czasu pomiędzy chwilą tuż przed i tuż po zderzeniu.

$$mv = (M + m)u$$

Gdzie u jest prędkością bloku wraz z tkwiącym w nim pociskiem tuż po zderzeniu. Po zderzeniu, blok wraz z pociskiem unoszą się na maksymalną wysokość h . Cała energia kinetyczna bloku wraz z pociskiem zamienia się w energię potencjalną.

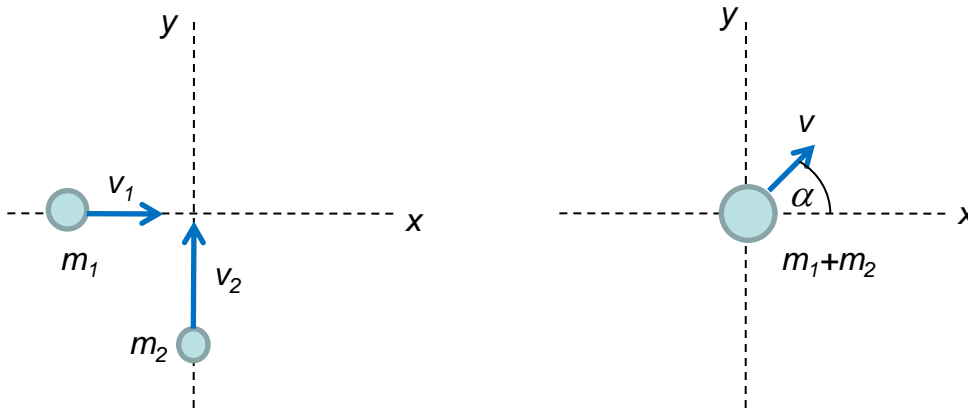
$$\frac{1}{2}(M + m)u^2 = (M + m)gh$$

Po rozwiązaniu powyższych równań otrzymujemy wyrażenie na szukaną prędkość pocisku:

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}$$

Zadanie 7. Łyżwiarz o masie $m_1=80\text{kg}$ jedzie w kierunku wschodnim z prędkością $v_1=6\text{km/h}$. Łyżwiarka o masie $m_2=50\text{kg}$ jedzie w kierunku północnym z prędkością $v_2=8\text{km/h}$. Para wpada na siebie, obejmuje i jedzie dalej razem. Jaka jest wspólna prędkość pary łyżwiarzy? Jaka część początkowej energii kinetycznej została wytracona w wyniku zderzenia?

Rozwiązanie



Stosujemy zasadę zachowania pędu oddzielnie dla składowej x i składowej y pędu. Dla składowej x mamy:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \cos \alpha$$

Dla składowej y:

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \sin \alpha$$

Powyższy układ równań możemy rozwiązać dzieląc drugie z równań przez pierwsze. Otrzymujemy:

$$\tan \alpha = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = 0.83 \Rightarrow \alpha = 39.8^\circ$$

Wykorzystując równanie na składową y pędu mamy:
$$v = \frac{m_2 v_2}{(m_1 + m_2) \sin \alpha} = 4.8 \text{ km/h}$$

Początkowa energia kinetyczna pary łyżwiarzy wynosiła:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 234.3 J$$

Końcowa energia kinetyczna łyżwiarzy wynosiła:

$$E_{k2} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = 115.6 J$$

Procentową zmianę energii kinetycznej możemy zapisać jako:

$$\frac{E_{k1} - E_{k2}}{E_{k1}} \cong 51 \%$$

W wyniku zderzenia łyżwiarzy wytracona została nieco ponad połowa początkowej energii kinetycznej.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Dwie masy m_1 i m_2 są w spoczynku, a między nimi znajduje się ściśnięta sprężyna. Jaki będzie stosunek prędkości obu mas gdy sprężyna zostanie zwolniona? **(Odp.: $v_1/v_2 = m_2/m_1$)**
2. Dwie masy $M=5\text{kg}$ i $m=2\text{kg}$ zderzają się centralnie i zatrzymują się po zderzeniu. Oblicz prędkość masy M jeśli prędkość masy m wynosiła przed zderzeniem 3m/s . **(Odp.: $v=1.2\text{m/s}$)**
3. Klocek o masie 2kg zderza się sprężysto z drugim klockiem pozostającym przed zderzeniem w spoczynku. Pierwszy klocek po zderzeniu porusza się dalej w tym samym kierunku ale z prędkością równą 25% prędkości początkowej. Jaka była masa drugiego klocka? **(Odp.: $m=1.2\text{kg}$)**
4. Dwie kulki plasteliny o masach $M=5\text{g}$ i $m=3\text{g}$ poruszają się z prędkościami odpowiednio $v_1=12\text{m/s}$ i $v_2=4\text{m/s}$ skierowanymi w tą samą stronę. Oblicz prędkość kulek po tym jak zderzyły się one centralnie i niesprężysto. **(Odp.: $v=9\text{m/s}$)**
5. Rozwiąż poprzednie zadanie rozpatrując przypadek sprężystego, centralnego zderzenia dwóch kul stalowych. **(Odp.: $v_1'=16\text{m/s}$, $v_2'=8\text{m/s}$)**
6. Pocisk o masie $m=10\text{kg}$ zostaje wystrzelony z armaty o masie $M=3000\text{kg}$ poziomo, z prędkością wylotową 60m/s . Zakładając brak tarcia o podłoże obliczyć jaka będzie prędkość odrzutu armaty. **(Odp.: $v=0.2\text{m/s}$)**
7. Działo o masie $M=10\text{ton}$ porusza się z prędkością $v=2\text{m/s}$ po poziomym podłożu. Jaka powinna być masa wystrzelonego w kierunku ruchu pocisku, żeby działo zatrzymało się po strzale. Prędkość wylotowa pocisku $u=10\text{m/s}$ **(Odp.: $m=2\text{tony}$)**
8. Pocisk lecący z prędkością 30m/s rozerwał się w powietrzu na dwa równej wielkości kawałki. Jeden z kawałków zatrzymał się i spadł na ziemię. Oblicz prędkość drugiego z kawałków. **(Odp.: $v=60\text{m/s}$)**
9. Pojazd międzyplanetarny waży 2 tony. Po wyrzuceniu paliwa o masie 400kg pojazd wznosi się pionowo na 1000m . Oblicz prędkość wyrzucanego paliwa. **(Odp.: $v=560\text{m/s}$)**
10. Stojący na poziomej tafli lodu łyżwiarz o masie 80kg rzuca poziomo kamieniem o masie 100g . Prędkość kamienia wynosi 5m/s . Po rzucie łyżwiarz zatrzymuje się po przejechaniu 20m . Ile ciepła zostało wydzielone podczas tarcia łyżew o lód od chwili rzutu do momentu zatrzymania? **(Odp.: $Q=1.56 \cdot 10^{-3}\text{J}$)**
11. Trzy doskonale sprężyste kulki o masach $m_1=3\text{kg}$, $m_2=2\text{kg}$, $m_3=1\text{kg}$, wiszą na równoległych nitkach tak, że kulki leżą na jednej prostej i stykają się powierzchniami. Kulka m_1 zostaje odchylona i uderza z prędkością $v=0.5\text{m/s}$ w kulkę m_2 . Jaka prędkość uzyska kulka m_3 ? **(Odp.: $v=0.8\text{m/s}$)**

12. Pod jakim minimalnym kątem należy wystrzelić z armaty pocisk aby mógł on przelecieć nad murem o wysokości 40m? Pocisk opuszcza lufę z prędkością 35m/s. **(Odp.: $\alpha=53.13^\circ$)**
13. Klocek o ciężarze 44N pchnięto w górę po równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem 30 stopni z prędkością początkową 5m/s. Okazało się, że ciało przebyło drogę $s=1.5\text{m}$, zatrzymało się, a następnie ześliznęło się w dół. Oblicz siłę tarcia ciała oraz prędkość ciała przy podstawie równi. **(Odp.: $F=16\text{N}$, $v=2\text{m/s}$)**
14. Do sznurka o długości 50 cm przytwierdzono kulę o masie 0.3kg i pozwolono jej opaść w dół w chwili kiedy sznurek był w pozycji poziomej. W najniższym punkcie swej drogi kula uderza w leżący na stole klocek o masie 3kg. Zderzenie jest sprężyste. Oblicz prędkość kuli w momencie zderzenia oraz prędkość bloku tuż po zderzeniu. **(Odp.: $v_k=3.13\text{m/s}$, $v_b=0.31\text{m/s}$)**
15. Kula metalowa o masie $m=5\text{kg}$ spada z wysokości $h=1\text{m}$ na poziomą podłogę i po odbiciu wznosi się ponownie na wysokość 30cm. Jaki pęd oddała kula podłodze w czasie uderzenia? **(Odp.: $\Delta p=34.3\text{kg}\cdot\text{m/s}$)**
16. Piłka o masie 0.5kg uderza z prędkością 30m/s z stalową płytą od kątem 45° i odbija się pod tym samym kątem i z prędkością o takiej samej wartości. Jak zmieniła się wartość i kierunek pędu piłki podczas uderzenia? **(Odp.: $\Delta p=21.2\text{kg}\cdot\text{m/s}$ prostopadle do płyty)**
17. W atom wodoru uderza elektron w taki sposób, że ruch po zderzeniu odbywa się po tej samej prostej co przed zderzeniem. Elektron jest 1840 razy lżejszy od atomu wodoru. Zderzenie jest sprężyste. Jaką część swojej energii kinetycznej przekaże elektron atomowi wodoru. **(Odp.:0.22%)**
18. Oblicz z jaką siłą działa dubeltówka na ramię strzelca przy wystrzale. Zakładamy, że pochodząca od dubeltówki siła jest stała i przesuwa ramię strzelca o 1.5 cm jednocześnie gdy kula opuszcza lufę. Masa dubeltówki $M=5\text{kg}$ masa kuli $m=10\text{g}$, prędkość wylotowa kuli $v=500\text{m/s}$ **(Odp.: $F=167\text{N}$)**
19. Kamień o masie 1.5 tony spadając z wysokości $h=1\text{m}$ wbija pał w ziemię na głębokość 5cm. Znaleźć siłę oporu ziemi oraz czas trwania uderzenia przy założeniu że było ono niesprężyste. **(Odp.: $F=2.94\cdot 10^5\text{N}$, $t=0.0226\text{s}$)**
20. Dwie ciężarówki A i B jadące odpowiednio na południe i zachód zderzają się na skrzyżowaniu i szczepiają się. Ciężarówka A miała masę 4.5 tony i jechała z prędkością 60km/h, ciężarówka B o masie 6 ton jechała z prędkością 90km/h. Z jaką prędkością poruszał się wrak ciężarówek? **(Odp.: $v=46\text{km/h}$ skierowana pod kątem 34° na zachód od kierunku południowego)**